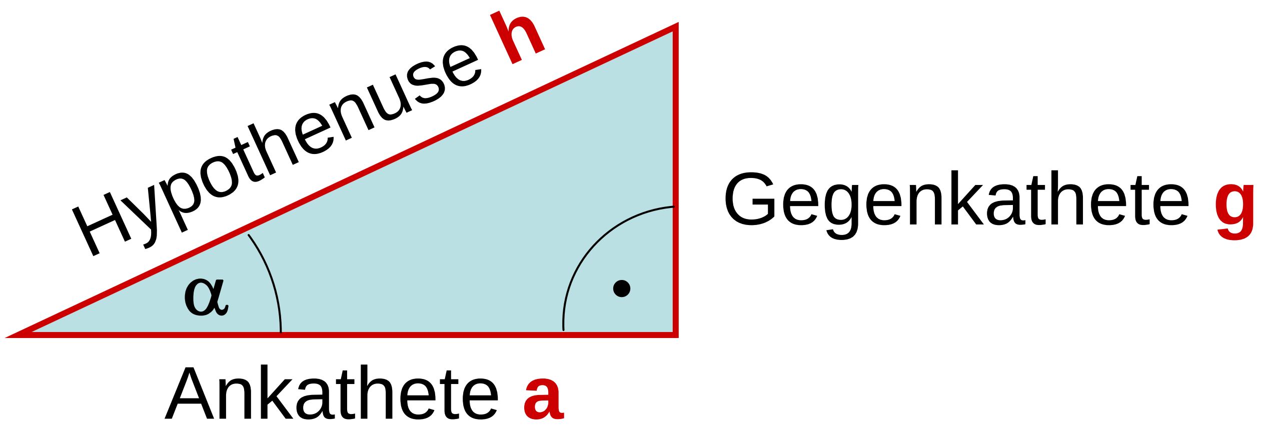
Wiederholung Trigonometrie

Trigonometrie



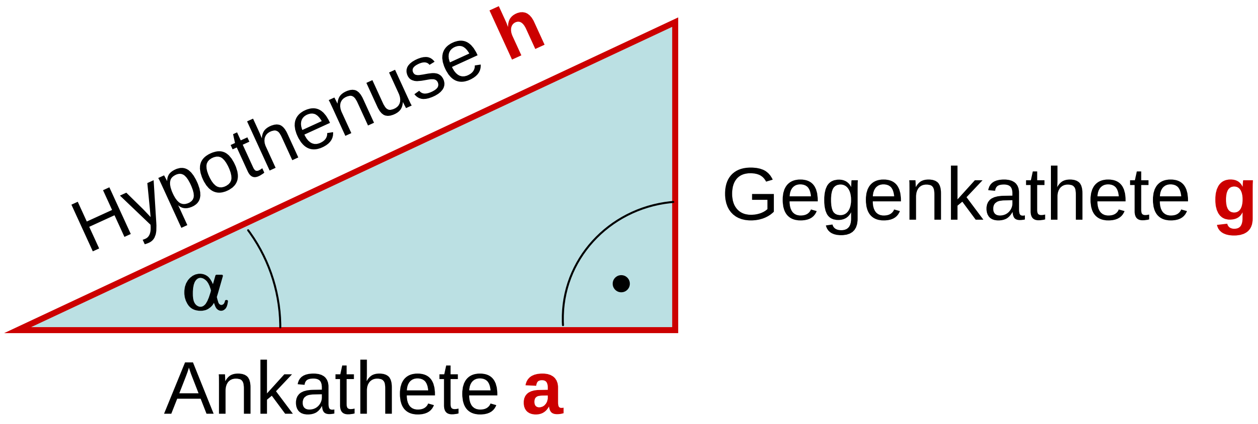
- Definition sinα, cosα, tanα

$$\sin\alpha = \frac{g}{h} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{h} \qquad \tan\alpha = \frac{g}{a}$$

- Satz des Pythagoras

$$h^2 = g^2 + a^2$$

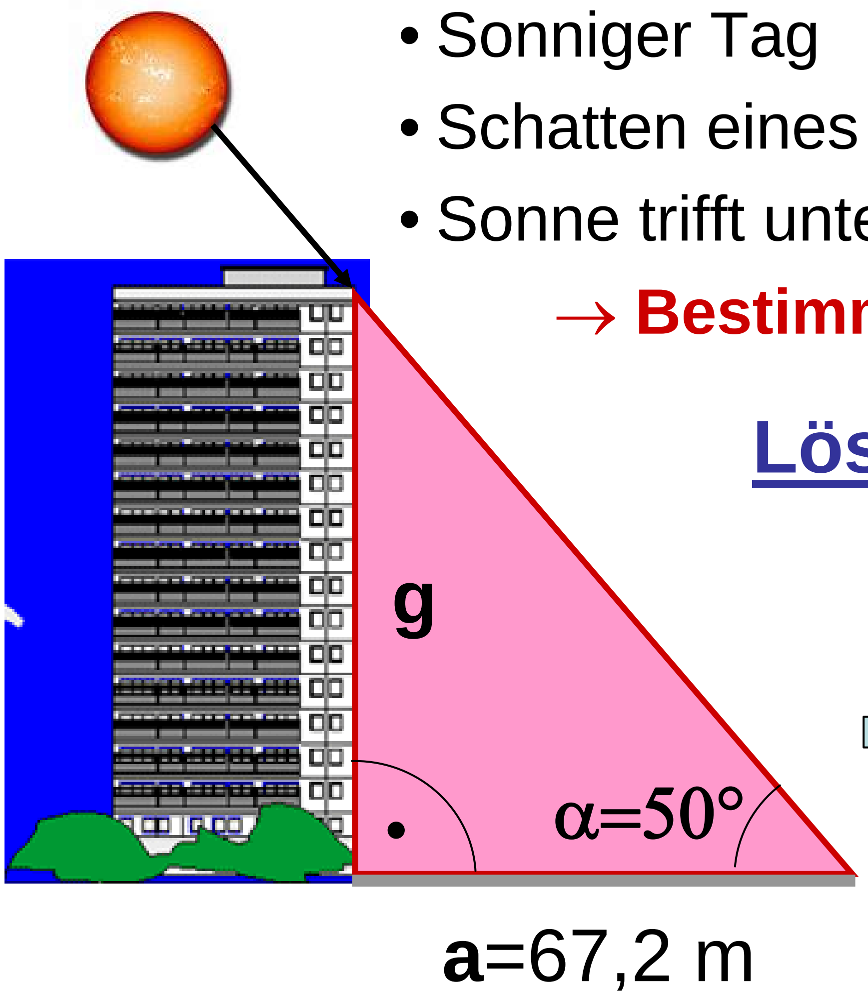
Inverse trigonometrische Funktion



- Bestimmung von Winkeln:

$$\alpha = \textbf{arcsin}\left(\frac{g}{h}\right) \quad \alpha = \textbf{arccos}\left(\frac{a}{h}\right) \quad \alpha = \textbf{arctan}\left(\frac{g}{a}\right)$$

Benutzung trigonometrischer Funktionen



- Sonniger Tag
- Schatten eines Hochhauses ist 67,2 m lang
- Sonne trifft unter 50° auf Boden auf

→ **Bestimme die Höhe des Hauses**

Lösung:

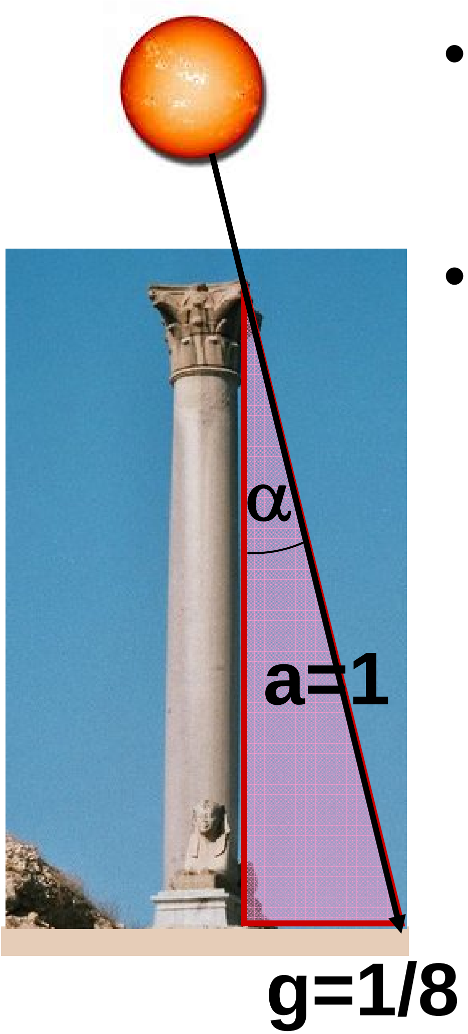
$$\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{g}{a}$$

$$\Rightarrow \quad g = a \cdot \mathbf{tan}\,\alpha$$

$$= 67{,}2\,\mathbf{m} \cdot \mathbf{tan}\,50^\circ$$

$$= 67{,}2\,\mathbf{m} \cdot 1{,}19 = 80{,}0\,\mathbf{m}$$

Inverse trigonometrische Funktion



- 21.Juni:
  Tag an dem die Sonne in Alexandria mittags am höchsten steht
- Schatten einer Säule ist 1/8 ihrer Höhe

$\rightarrow$ **Bestimme den Winkel der Sonne**

Lösung:

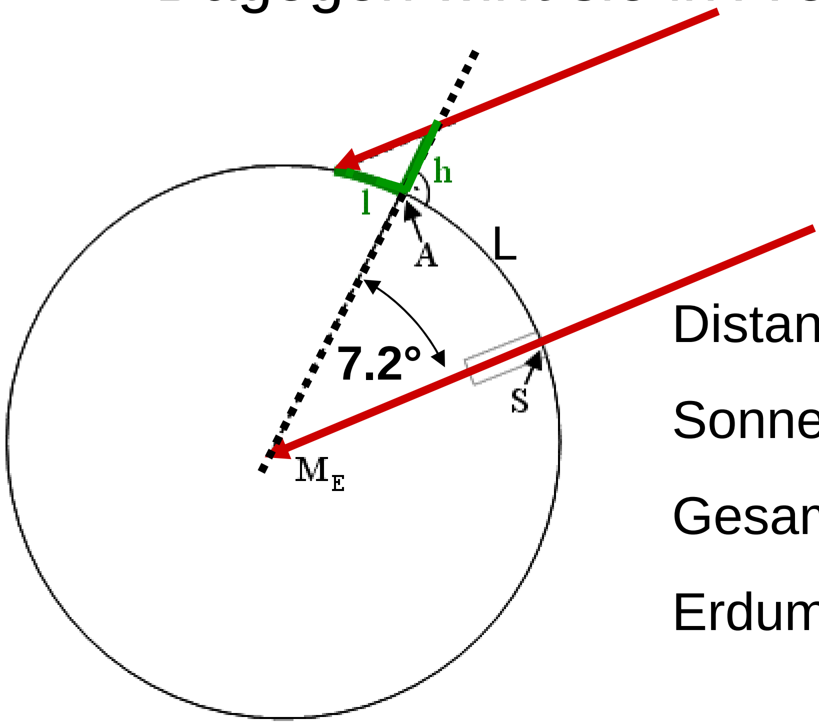
$$\tan\alpha = \frac{g}{a} = \frac{1/8}{1} = 1/8 = 0.125$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan(0.125) = 7.2°$$

Anwendungsbeispiel: Bestimmung der Größe der Erde

(Erstmals von Eratosthenes ≈236 v. Chr. bestimmt)

- Am 21.Juni steht die Sonne mittags senkrecht über Syene
- Dagegen wirft sie in Alexandria einen Schatten (siehe vorn)



Distanz Alexandria – Syene (*L*): 800 km

Sonne trifft in Alexandria mittags unter 7.2° auf

Gesamte Erdkugel: 360°

Erdumfang (*U*):

$$U = L \cdot \frac{360°}{7.2°} = 800\,\mathbf{km} \cdot 50 = 40\,000\,\mathbf{km}$$

Skalare und Vektoren

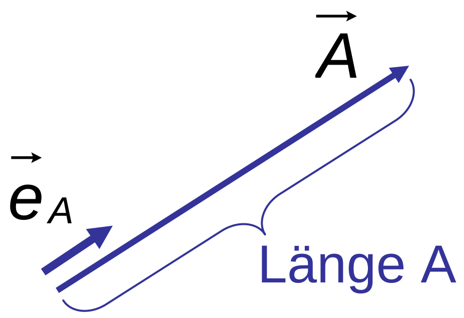
Zur Beschreibung physikalischer Vorgänge werden physikalische Größen mit Dimensionen verwendet. Diese teilen sich auf in:

<u>Skalare Größen:</u>

$$A = \underbrace{\{A\}}_{\textit{Maßzahl}} \cdot \underbrace{[A]}_{\textit{Dimension}}$$

<u>Vektorielle Größen:</u>

$$\vec{A} = \{A\} \cdot [A] \cdot \vec{e}_A = A \cdot \vec{e}_A$$



Einheitsvektor, gibt die Richtung von $\vec{A}$ im Ortsraum an.

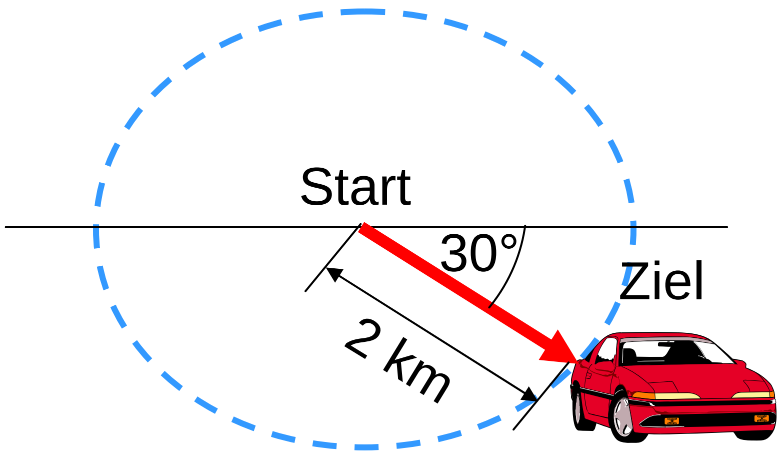
Der Einheitsvektor hat den Betrag (die Länge) 1 und gibt nur die Richtung an: $\vec{e}_A = \dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$

Definition: $\left|\vec{A}\right| = A$

Skalare und Vektoren

- Skalare Größen: z.B. Volumen (50 m^3), Zeit (10 s), Temperatur (20°C), Masse (3 kg)

- Vektoren: bestehen aus Größe und Richtung



z.B.

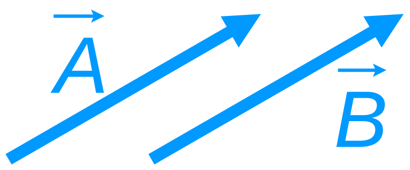
Ortsvektor $\vec{r}$

Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$

Kraftvektor $\vec{F}$

Eigenschaften von Vektoren

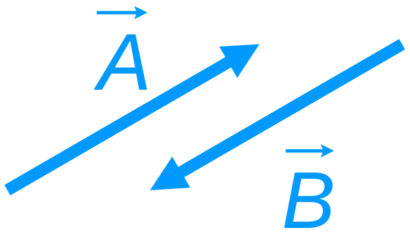
Verschiebbarkeit:



Vektoren sind allein durch Betrag und Richtung gegeben, daher gilt:

$$\boxed{\vec{A} = \vec{B}}$$

Negative Vektoren:



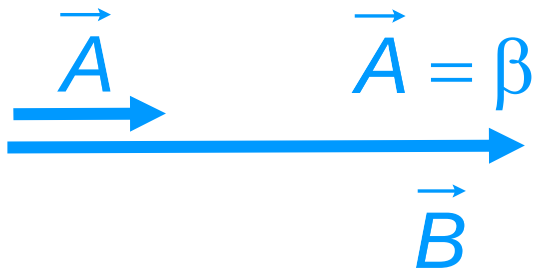
Da Betrag, aber nicht Richtung übereinstimmen, gilt:

$$\boxed{\vec{A} \neq \vec{B}}$$

Da beide Vektoren antiparallel gilt:

$$\boxed{\vec{A} = -\vec{B}}$$

Multiplikation mit Skalar

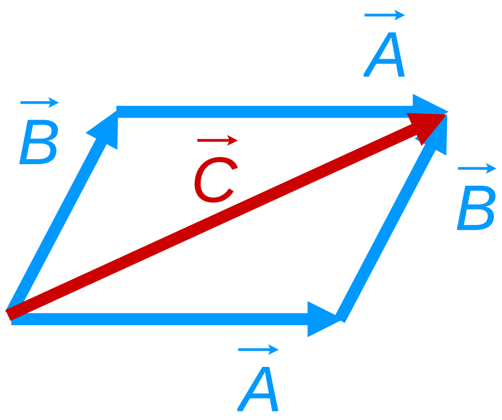


$$\vec{A} = \beta \cdot \vec{B}$$

Multiplikation mit Skalar ändert nicht die Richtung, von $\vec{A}$, sondern nur den Betrag.

Speziell: $\vec{A} = A \cdot \vec{e}_A$

Vektoraddition



$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}}$$

Vektoren addieren sich geometrisch.

Die Addition ist kommutativ

Vektorsubtraktion

Vektorsubtraktion wird ausgeführt wie Vektoraddition, nur dass einer der Vektoren mit -1 multipliziert wird.

$$\boxed{\vec{A} = \vec{C} + \left(-\vec{B}\right) = \vec{C} - \vec{B}}$$

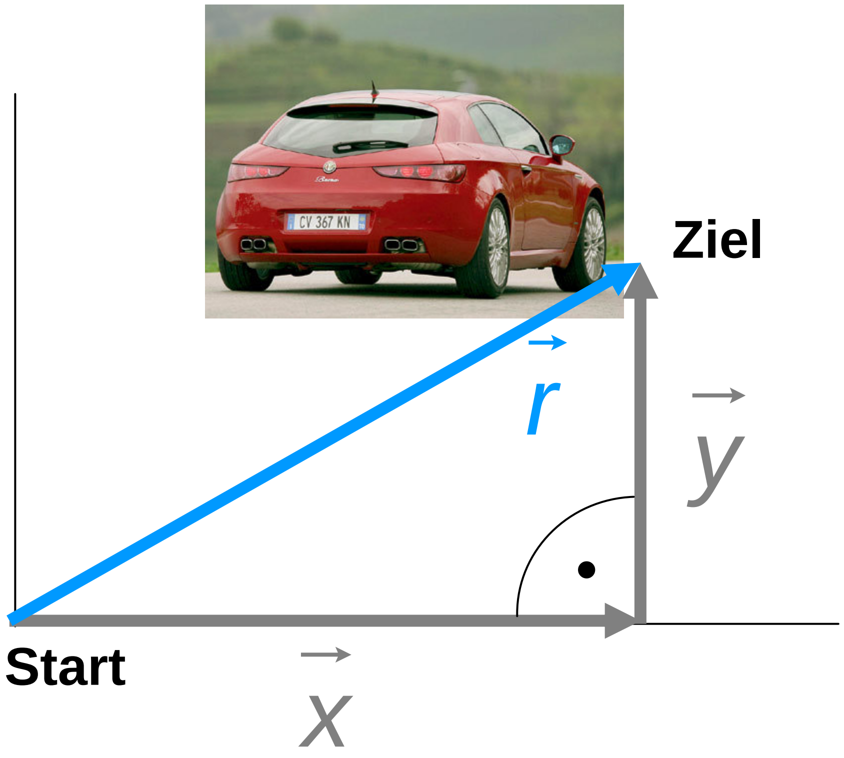
Komponenten eines Vektors

Problem:

- Ein Auto fährt von Start bis Ziel entlang des Vektors $\vec{r}$
- Alternativer Weg: erst entlang $\vec{x}$, dann rechtwinklig links abbiegen und entlang $\vec{y}$
- Also Vektoraddition

$$\boxed{\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}}$$

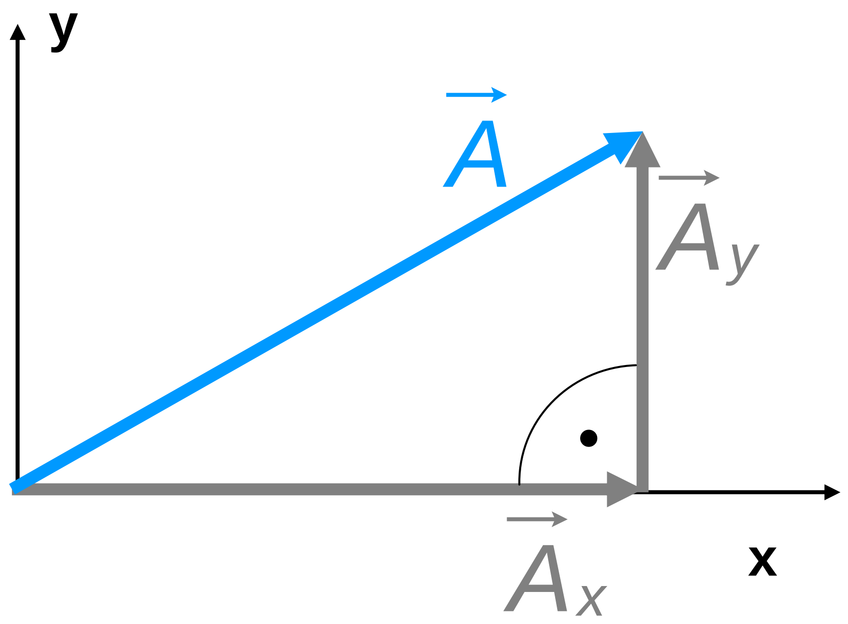
- D.h., die Komponenten eines Vektors können anstatt des Vektors selbst benutzt werden!



Komponenten eines Vektors

Allgemein:

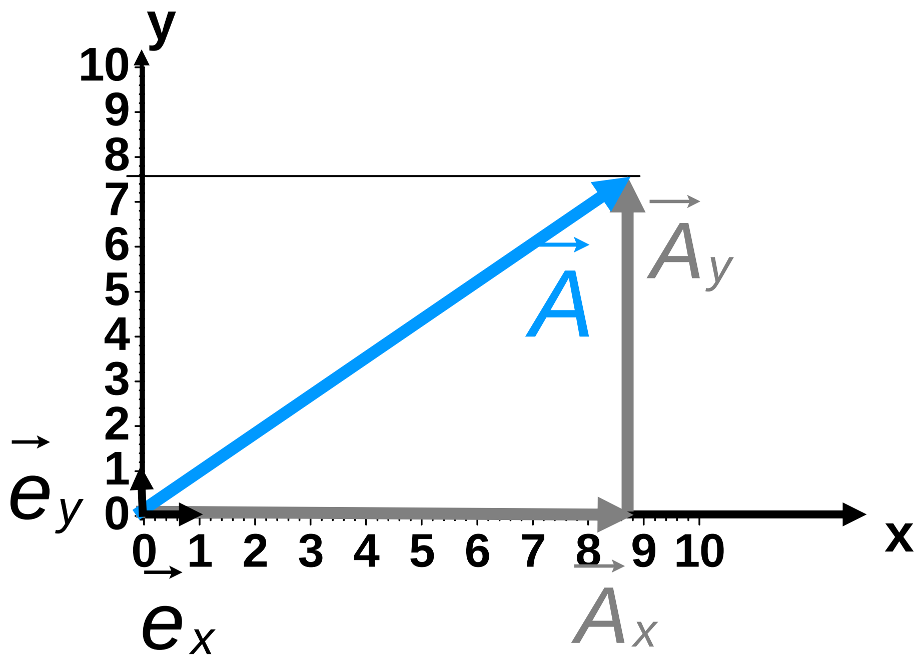
- Jeder Vektor kann in Form seiner Komponenten ausgedrückt werden.
- Die Komponenten werden parallel zur x- und y-Achse gezeichnet
- Sie addieren sich in zwei Dimensionen vektoriell zu



$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y}$$

Skalare Komponenten

- Es ist oft einfacher, mit den skalaren Komponenten A_x und A_y zu arbeiten als mit $\vec{A}_x$ und $\vec{A}_y$
- Die skalaren Komponenten entsprechen den Längen der Vektoren $\vec{A}_x$ und $\vec{A}_y$, da gilt: $\vec{A}_x = A_x \vec{e}_x \qquad \vec{A}_y = A_y \vec{e}_y$



$$A_x = 8{,}8\,\textbf{cm}$$

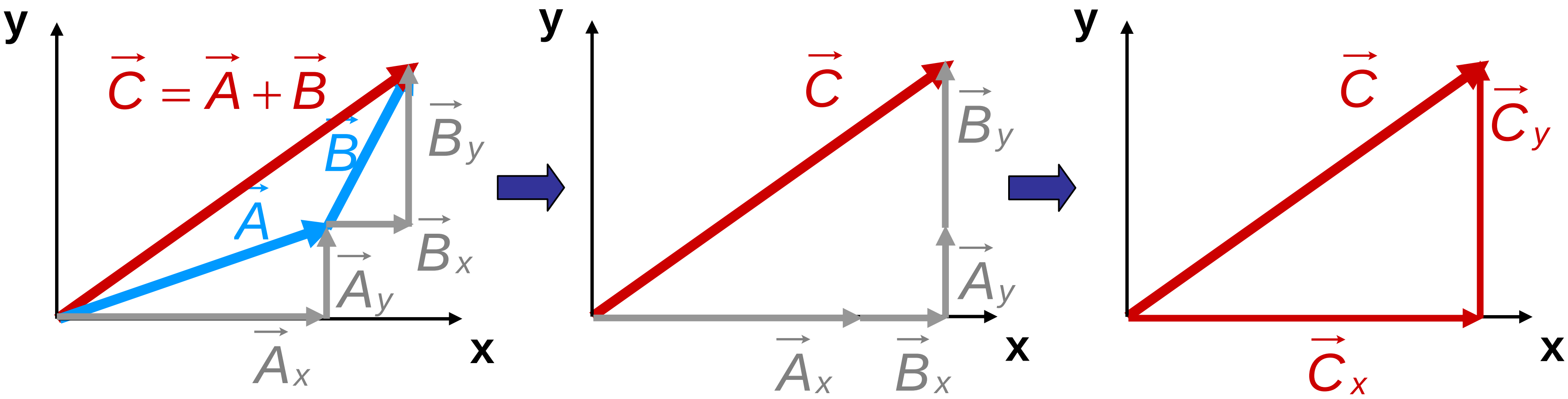
$$A_y = 7{,}6\,\textbf{cm}$$

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2}$$

$$= \sqrt{(8{,}8\,\textbf{cm})^2 + (7{,}6\,\textbf{cm})^2}$$

$$= 11{,}6\,\textbf{cm}$$

Vektoraddition mittels Komponenten



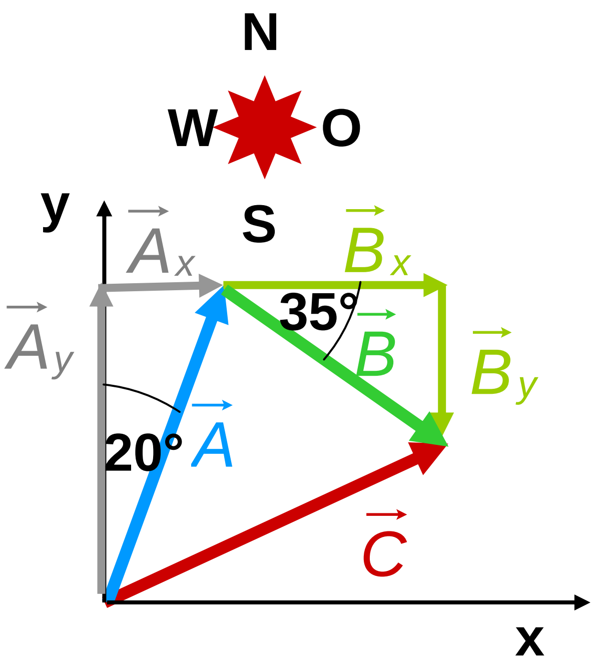
$$\boxed{\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \end{aligned}}$$

- Länge des Vektors $\vec{C}$:

$$C = \sqrt{C_x^{\,2} + C_y^{\,2}}$$

Beispiel

- Ein Jogger läuft 145 m in eine Richtung 20° östlich in Bezug auf Norden (Vektor $\vec{A}$), dann 105 m 35° südlich in Bezug auf Osten (Vektor $\vec{B}$).
- Bestimme Länge und Richtung des resultierenden Vektors $\vec{C}$!



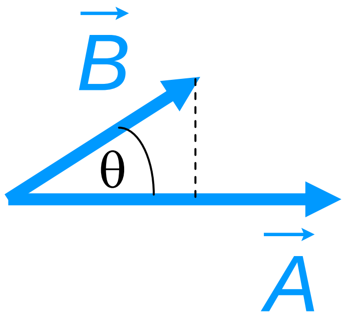
Vektor	x-Komponente	y-Komponente
$\vec{A}$	A_x=(145m)sin20° =49,6m	A_y=(145m)cos20° =136,3m
$\vec{B}$	B_x=(105m)cos35° =86,0m	B_y=-(105m)sin35° =-60.2m
$\vec{C}$	$C_x=A_x+B_x$=135,6m	$C_y=A_y+B_y$=76,1m

Multiplikation von Vektoren

Es gibt zwei Arten, Vektoren miteinander zu multiplizieren:

1. Skalarprodukt: $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=C}$ = Skalar
2. Vektorprodukt: $\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}}$ = Vektor

Skalarprodukt: $$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\cdot\underbrace{\left|\vec{B}\right|\mathbf{cos}\,\theta}_{\text{Projektion von } \vec{B} \text{ auf } \vec{A}}$$

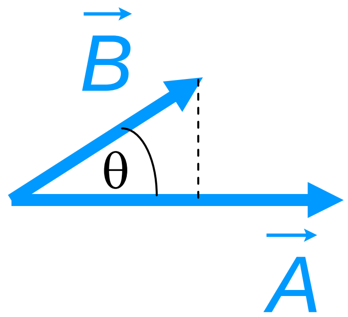


$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_y\vec{e}_y\right)\cdot\left(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_y\vec{e}_y\right)$$

$$=A_xB_x\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x}_{1}+A_xB_y\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y}_{0}+\ldots$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\vec{B}\cdot\vec{A}$$ kommutativ

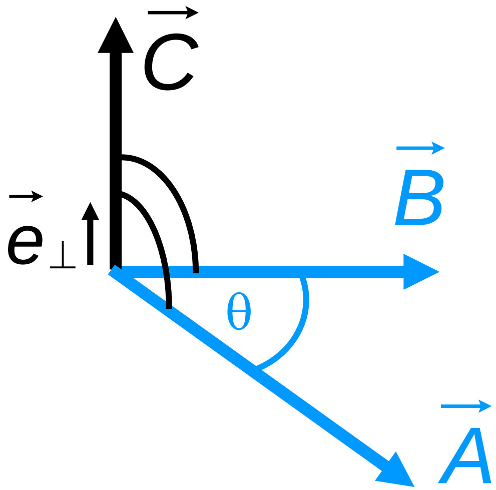
Skalarprodukt



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\cdot\underbrace{\left|\vec{B}\right|\cos\theta}_{\text{Projektion von } \vec{B} \text{ auf } \vec{A}}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= \left(A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_y\vec{e}_y\right)\cdot\left(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_y\vec{e}_y\right)\\ &= A_xB_x\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x}_{1} + A_xB_y\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y}_{0} + \ldots\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \vec{B}\cdot\vec{A} \qquad \text{kommutativ}\end{aligned}$$

Vektorprodukt



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \,\mathbf{sin}\,\theta \cdot \vec{e}_\perp$$

wobei $\vec{e}_\perp$ senkrecht auf der Fläche steht, die durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ aufgespannt wird.

$\left|\vec{C}\right|$ entspricht der Fläche, die durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ gebildet wird.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\vec{e}_x + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\vec{e}_y + \left(A_x B_y - A_y B_z\right)\vec{e}_y$$